数理解析研究所講究録
430巻 1981年 68-79

L_r空間におけるNavier-Stokes初期値問題

広島大 理　宮川 鉄朗

§1. はじめに.

$\mathbb{R}^n$ $(n \geqq 2)$ の有界領域 D において、Navier-Stokes方程式の初期値問題

$$
(E) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + (u, \nabla) u = f - \nabla p & (t>0,\ x \in D) \\ \operatorname{div} u = 0 & (t>0,\ x \in D) \\ u|_S = 0 & \\ u(x,0) = a(x) & (x \in D) \end{cases}
$$

を考える。D の境界 S は、なめらかとする。$u = \{u^j(x,t)\}_{j=1}^n$, $p = p(x,t)$ は、求めるべき速度ベクトルと圧力を、$a = \{a^j(x)\}_{j=1}^n$ $f = \{f^j(x,t)\}_{j=1}^n$ は、与えられた初期速度と外力をあらわす。

よく知られた直交分解：

$$
(1) \quad \begin{aligned} &(L_2(D))^n = X_2 \oplus G_2 \\ &X_2 = \{w \in (C_0^\infty(D))^n ;\ \operatorname{div} w = 0\} \text{ の } L_2\text{-閉包} \\ &G_2 = \{\nabla p ;\ p \in \overline{W}{}_2^1(D)\} \end{aligned}
$$

を用いることにより，圧力項が消去される。すなわち，$P:(L_2(D))^n \to X_2$ を直交射影とするとき，(E)は，X_2における発展方程式：

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt}+Au=Pf+Fu, & t>0 \\ u(0)=a, & (Fu=-P(u,\nabla)u) \end{cases}$$

に変換される。$A=-P\Delta$ は，X_2におけるStokes作用素と呼ばれるもので，$D(A)=\{u\in(W_2^2(D))^n;\ u|_S=0\}\cap X_2$ なる正値自己共役作用素である。Hopf[9]は，$n=2,3$のとき，任意の $a\in X_2$ に対して（Pfに適当な仮定を入れて）(I)が大域的な弱解をもつことを示した（$n\geqq 4$の場合は[13]参照）。しかし，$n\geqq 3$のときには，Hopfの解の一意性，正則性については，殆んどわかっていない。そこで，a, Pf に対して様々な仮定を置いて，Hopfのよりも正則な解を求める試みが多くの人々によってなされた。その結果は，書物[12]にまとめられているが，一般に局所解の存在が知られているだけである。

この方向での最良の結果は，加藤－藤田[3]，[11]によるものである。彼等は，$-A$がX_2において解析半群$\{e^{-tA};\ t\geqq 0\}$を生成することを用いて，(I)を積分方程式：

$$\text{(II)}\quad u(t)=e^{-tA}a+\int_0^t e^{-(t-s)A}\{Fu(s)+Pf(s)\}ds$$

の形で考察した。そして（Pfに対するある仮定の下で）任意の

$a \in D(A^{1/4})$ $(n=3)$ に対して (II) が局所解をもつこと，a と Pf が十分小ならばその解が大域的に存在すること，さらに Pf がある種の Hölder 条件を満たせば，得られた解が古典解であることを示した。これらの結果は，井上-脇本 [10] により $n=4,5$ の場合に拡張された。それによれば，$n=4$ のとき $a \in D(A^{1/2})$，$n=5$ のとき $a \in D(A^{3/4})$ を仮定すれば，[11] と同様のことがらが示される。$n \geqq 6$ のときは，正則解の存在は知られていない。

本講の目的は，積分方程式 (II) を，一般の L_r 空間 $(1<r<\infty)$ で解くことである。その結果，$r \geqq n$ ならば，「$a \in D(A^{\alpha})$」の形のなめらかさの仮定が不要であることがわかる。我々の議論は，任意の $n \geqq 2$ に対して通用する。議論のカナメとなるのは，次の事実である。

(イ) $(L_r(D))^n$ のある部分空間で，Stokes 作用素 A が定義され，$-A$ が解析半群を生成すること。

(ロ) 分数巾 A^{α} の定義域が，複素補間空間として，explicit に求められること。

(イ)は，東大の儀我美一氏 [6]，筆者 [14]，及び Solonnikov [16] によって，(ロ)は，儀我氏 [7] によって示された。本講で述べる結果は，儀我氏と筆者との共同研究 [8] によって得られたものである。

§2. Stokes作用素.

分解(1)は、藤原－森本[5]によって、次のように拡張されている。

定理([5]). $1<r<\infty$ のとき、次が成立する。

(i). $(L_r(D))^n = X_r \oplus G_r$ (直和), $X_r = \{w \in (C_0^\infty(D))^n ; \mathrm{div}\, w = 0\}$ の L_r-閉包, $G_r = \{\nabla p ; p \in \overline{W}_r^1(D)\}$.

(ii) $X_r^* = X_{r'}$, $X_r^\perp = G_{r'}$, $r' = r/(r-1)$. ここに, $X_r^*(X_r^\perp)$ は, X_r の dual space (annihilator) をあらわす。

P_r を, 上の分解に対応する X_r への射影とする。$A_r = -P\Delta$ を, $D(A_r) = X_r \cap \{u \in (\overline{W}_r^2(D))^n ; u|_S = 0\}$ の上で定義すると, X_r での閉作用素で有界な逆をもつことが知られている ([2])。A_r を X_r における Stokes作用素と呼ぶ。次の事実も[5]による。

(2) $A_r^* = A_{r'}$, $P_r^* = P_{r'}$。

ここに, $*$ は dual operator をあらわす。以下, 単に A, P と記す。

定理1 ([6], [14], [16]). $-A$ は, 各 X_r $(1<r<\infty)$ において, 一様有界な解析半群 $\{e^{-tA} ; t \geq 0\}$ を生成する。

[14], [16] では, 非定常Stokes方程式の L_r 評価式から出発して, 定理1が導かれている。[6]では, 擬微分作用素を用いて直接に A の resolvent を構成し, それの評価によって, 証明している。[6]による resolvent の構成を用いることで, 次の定理2の証明が可能となる。

定理2（[7]）。 $0<\alpha<1$ とする。分数巾 A^α の定義域 $D(A^\alpha)$ は、複素補間空間 $[X_r, D(A)]_\alpha$ に一致する。（複素補間空間については[1]参照）。

さて、$B=-\Delta$ を $(L_r(D))^n$ における Dirichlet 条件付きの Laplace 作用素とする。藤原[4]によれば、

$$D(B^\alpha)=[(L_r(D))^n, D(B)]_\alpha \hookrightarrow (H_r^{2\alpha}(D))^n \quad \text{（埋め込みは連続）}$$

である。このことと、$D(A)=X_r\cap D(B)$、それに定理2から、

(3) $$D(A^\alpha)=X_r\cap D(B^\alpha), \quad 0\le\alpha\le 1$$

が従う。

以下、我々は、$\alpha<0$ に対して、

(4) $$D(A^\alpha)=D(A_{r'}^{-\alpha})^*, \quad (A=A_r),$$

とおく。次の補題は、(2)を用いて容易に確かめられる。

補題3. $\alpha<0$ のとき、$D(A^\alpha)$ は、ノルム $\|A^\alpha u\|$ による X_r の完備化と一致する。ここに、$\|\cdot\|$ は普通の L_r-ノルムである。

この事実と、よく知られた評価：$\|A^\beta e^{-tA}\|\le C_\beta t^{-\beta}$, $(\beta\ge 0)$ とから、次の定理は容易にわかる。

定理4. 任意の $\alpha\le\beta$ に対し、e^{-tA} $(t>0)$ は、$D(A^\alpha)$ から $D(A^\beta)$ への有界作用素を定める。特に、任意の α に対して、$\{e^{-tA};\ t\ge 0\}$ は、$D(A^\alpha)$ 上で、一様有界な解析半群を定める。

§3. 結果.

前節の結果を利用して，積分方程式

$$(\mathrm{II}) \qquad u(t) = e^{-tA}a + \int_0^t e^{-(t-s)A}\{Fu(s) + Pf(s)\}ds$$

を各 X_r で解く。次の補題が基本的である。

補題5. $0 \leq \delta < 1/2 + n(1-1/r)/2$ とする。このとき，
$\theta > 0,\ \rho > 0,\ \rho + \delta > 1/2,\ \theta + \rho + \delta \geqq n/2r + 1/2$ ならば，

$$(5) \quad \|A^{-\delta}P(u,\nabla)v\| \leqq M\|A^{\theta}u\|\cdot\|A^{\rho}v\|, \quad (\|\cdot\|: L_r\text{-ノルム})$$

が成り立つ。定数 $M > 0$ は，θ, ρ, δ, r に依存するが，$u \in D(A^{\theta})$ $v \in D(A^{\rho})$ にはよらない。

証明の概略を述べる。(3) により，$(\partial/\partial x_j) I A_{r'}^{-1/2} : X_{r'} \to (L_{r'}(D))^n$ は有界である ($I : X_{r'} \hookrightarrow (L_{r'}(D))^n$, inclusion) から，dual をとれば，$A^{-1/2}P\,\partial/\partial x_j : (L_r(D))^n \to X_r$ が，有界作用素として一意に定まることに注意する。評価 (5) は，dense subsets に属する u, v に対して証明されれば十分だから，$u, v \in (C^1(\bar{D}))^n$ とする。$\operatorname{div} u = 0$ より，$P(u,\nabla)v = \sum P u^j \partial v/\partial x_j = \sum P \partial(u^j v)/\partial x_j$ である。

(i) $\delta \geqq 1/2$ のとき。$\delta = \varepsilon + 1/2$ とおく。(3) と Sobolev により，
$A_{r'}^{-\varepsilon} : X_{r'} \to X_{s'}$ $(1/s' = 1/r' - 2\varepsilon/n)$ は有界，従って，
$A^{-\varepsilon} : X_s \to X_r$ $(1/s = 1 - 1/s' = 1/r + 2\varepsilon/n)$ は有界である。
よって，$\|A^{-\delta}P(u,\nabla)v\| \leqq \sum\|A^{-\varepsilon-1/2}P(\partial/\partial x_j)(u^j v)\|$

$$\leqq C\sum\|A^{-1/2}P(\partial/\partial x_j)(u^j v)\|_{X_s}$$
$$\leqq C\|\,|u|\cdot|v|\,\|_{L_s}\leqq C\|u\|_{X_p}\|v\|_{X_q}$$

$(1/p+1/q=1/s)$, が従う。最後の項にSobolevの補題を用いて(5)を得る。((3)に注意).

<u>(ii) $\delta=0$のとき.</u> Pは有界だから,

$$\|P(u,\nabla)v\|\leqq C\|(u,\nabla)v\|\leqq C\|u\|_{X_p}\|\nabla v\|_{L_q}$$

$(1/p+1/q=1/r)$。これにSobolevを適用すればよい。

<u>(iii) $0<\delta<1/2$のとき.</u> $\delta=0$, $\delta=1/2$の場合の結果に対し,補間空間の理論を適用すればよい。((4),補題3,を参照)。

<u>注意。</u>補題5は,[3],[10],[11]の対応する結果を特別の場合として含む。上記の証明は,それらに対するものより,ずっと簡単である。

さて,(II)の解法を考える。[11]に従って,次のiteration schemeを用いる。

$$(6)\begin{cases} u_0(t)=e^{-tA}a+\int_0^t e^{-(t-s)A}Pf(s)\,ds \\ u_{m+1}(t)=u_0(t)+\int_0^t e^{-(t-s)A}Fu_m(s)\,ds,\quad m\geqq 0. \end{cases}$$

$n/2r-1/2\leqq\gamma<1$, $0\leqq\delta<1-|\gamma|$, $0<\gamma+\delta<1$, なるr,γ,δを固定する。a, Pfには次の仮定をおく。

$$(7)\begin{cases} a\in D(A^{\gamma}),\quad Pf\in C((0,T];D(A^{-\delta})), \\ \|A^{-\delta}Pf(t)\|=o(t^{\gamma+\delta-1})\quad \text{as } t\downarrow 0. \end{cases}$$

すると、(6)から、

$$\|A^\alpha u_0(t)\| \leq \|A^{\alpha-\gamma}e^{-tA}A^\gamma a\| + \int_0^t \|A^{\alpha+\delta}e^{-(t-s)A}\| \|A^{-\delta}Pf(s)\| ds$$

$$\leq \|A^{\alpha-\gamma}e^{-tA}A^\gamma a\| + C_{\alpha,\delta}\int_0^t (t-s)^{-\alpha-\delta}s^{\gamma+\delta-1}ds \times N$$

$$\leq K_{\alpha 0}t^{\gamma-\alpha} \quad (\gamma \leq \alpha < 1-\delta),$$

$$K_{\alpha 0} = \sup_{0<t\leq T} t^{\alpha-\gamma}\|A^{\alpha-\gamma}e^{-tA}A^\gamma a\| + C_{\alpha,\delta}NB(1-\delta-\alpha, \gamma+\delta),$$

$$N = \sup_{0<t\leq T} t^{1-\gamma-\delta}\|A^{-\delta}Pf(t)\|.$$

が従う。(ここで、例えば $\|A^{-\delta}Pf(t)\|$ は、$Pf(t)$ の $D(A^{-\delta})$-ノルムである)。$B(p,q)$ は、ベータ関数をあらわす。さて、ある $m \geq 0$ に対して、

(8) $\qquad \|A^\alpha u_m(t)\| \leq K_{\alpha m}t^{\gamma-\alpha} \quad (\gamma \leq \alpha < 1-\delta)$

なる評価が得られたとして、$\theta > 0$, $\rho > 0$, $\rho + \delta > 1/2$, $\theta + \rho + \delta = 1 + \gamma \ (\geq n/2r + 1/2)$, $\theta, \rho < 1-\delta$, なる θ, ρ を一組えらんで固定する。γ, δ に対する仮定により、それは可能である。すると、補題5によって、

$$\|A^\alpha u_{m+1}(t)\| \leq K_{\alpha 0}t^{\gamma-\alpha} + \int_0^t \|A^{\alpha+\delta}e^{-(t-s)A}\| \|A^{-\delta}\tilde{H}u_m(s)\| ds$$

$$\leq K_{\alpha 0}t^{\gamma-\alpha} + C_{\alpha,\delta}M\int_0^t (t-s)^{-\alpha-\delta}\|A^\theta u_m(s)\| \|A^\rho u_m(s)\| \times ds$$

$$\leq \{K_{\alpha 0} + C_{\alpha,\delta}MK_{\theta m}K_{\rho m}B(1-\delta-\alpha, \gamma+\delta)\}t^{\gamma-\alpha}.$$

したがって、

$$K_{\alpha,m+1} = K_{\alpha,0} + C_{\alpha,\delta} M K_{\theta m} K_{\rho m} B(1-\delta-\alpha, \gamma+\delta)$$

とおけば，mを$m+1$におきかえて(8)が成りたつ。$m=0$の場合はすでにcheckしたから，結局すべての$m \geq 0$に対して，(8)が成りたつ。$t \downarrow 0$のとき，$t^{\alpha-\gamma}\|A^{\alpha-\gamma}e^{-tA}A^{\gamma}a\| \to 0$ $(\gamma<\alpha)$，$t^{1-\gamma-\delta}\|A^{-\delta}Pf(t)\| \to 0$，に注意すれば，[11]と全く同様にして，次の諸定理が証明される。

定理6. $n/2r - 1/2 \leq \gamma < 1$，$0 \leq \delta < 1-|\gamma|$，$0<\gamma+\delta$とし，$a$，$Pf$は(7)を満たすとする。このとき，正数$T_*$ $(\leq T)$が定まり，積分方程式(II)は，$[0,T_*]$上で，次のような一意的な解$u(t)$をもつ。(i) $u \in C([0,T_*];D(A^{\gamma}))$；(ii) ある$\beta > |\gamma|$が存在して，$u \in C((0,T_*];D(A^{\beta}))$，$\|A^{\beta}u(t)\| = o(t^{\gamma-\beta})$，$(t \downarrow 0)$。さらに，$Pf$が$X_r$-値関数として，各$[\varepsilon,T]$ $(0<\varepsilon<T)$上でHölder連続ならば，上記$u(t)$は$[0,T_*]$上で，発展方程式(I)を満たす。

定理7. $Pf(t)$が$(0,\infty)$上で定義され，$\|A^{\gamma}a\|$，$\sup_{t>0} t^{1-\gamma-\delta}\|A^{-\delta}Pf(t)\|$が十分小ならば，定理6で得られた解$u(t)$は，$[0,\infty)$上で存在する。

注意. (a) 上記定理で，$r=2$，$n=2,3,4,5$とおけば，[10]，[11]の結果が得られる。

(b). $r>n$の場合は初期値aのクラスは，X_rよりも広い。実際，この場合は$\gamma<0$が許される。

(c) 上の定理では, $n/2r - 1/2 < 1$ を仮定した。これが成り立たない r に対しては, iteration scheme (6) を X_r で用いることが出来ない。しかし, $\gamma \geq n/2r - 1/2 \geq 0$ ならば $D(A^\gamma) \subset X_n$ (Sobolevによる, (3)参照)だから, $a \in X_n$ とみなして, X_n内で(II)を解くことが出来る。

$u(t)$のなめらかさについては, 次のことが示される。

<u>定理8.</u> $f \in (C^\infty(\bar{D} \times (0, T]))^n \Rightarrow u \in (C^\infty(\bar{D} \times (0, T_*]))^n$.

詳細は[8]を見られたい。

<u>注意.</u> (d). 簡単のため $Pf = 0$ とする。$r > n$, $a \in X_r$ ならば定理6-7の解は, Hopfの弱解のクラスでuniqueである。$r = n$, $a \in X_n$ のときは, aが十分小ならば, 同じことが言えるが, 一般には未解決である。([14]).

(e) Weissler [17] は, $D = R^n_+$ (半空間, $n \geq 3$)の場合に, 積分方程式(II)を考察し, 我々のよりもやや弱い結果を得た。[17]における仮定は次の通りである。

$n/2r - 1/2 < \gamma < 1$, $-1/4 < \gamma$, $Pf = 0$.

(f). Sobolevskii は[15]において, $1 < r \leq n$ の場合に, 我々と同様の結果を得たことを報告している。しかし, 証明の詳細は明らかにされていない。[15]における議論には不備があるように思われる。

References

[1] A. P. Calderón, Intermediate spaces and interpolation, the complex method, Studia Math. 24 (1964), 113-190.

[2] L. Cattabriga, Su un problema al contorno relativo al sistema di equazioni di Stokes, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 31 (1961), 308-340.

[3] H. Fujita and T. Kato, On the Navier-Stokes initial value problem I, Arch. Rational Mech. Anal. 16 (1964), 269-315.

[4] D. Fujiwara, On the asymptotic behaviour of the Green operators for elliptic boundary problems and the pure imaginary powers of some second order operators, J. Math. Soc. Japan 21 (1969), 481-521.

[5] D. Fujiwara and H. Morimoto, An L_r-theorem of the Helmholtz decomposition of vector fields, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. I 24 (1977), 685-700.

[6] Y. Giga, Analyticity of the semigroup generated by the Stokes operator in L_r spaces, (submitted to Math. Z.).

[7] Y. Giga, Domains in L_r spaces of fractional powers of the Stokes operator, (submitted to Arch. Rational Mech. Anal.).

[8] Y. Giga and T. Miyakawa, Solutions in L_r to the Navier-Stokes initial value problem, (submitted to Arch. Rational Mech. Anal.).

[9] E. Hopf, Uber die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen, Math. Nachr. 4 (1950-51), 213-231.

[10] A. Inoue and M. Wakimoto, On existence of solutions of the Navier-Stokes equation in a time dependent domain, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. I 24 (1977), 303-320.

[11] T. Kato and H. Fujita, On the nonstationary Navier-Stokes system, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 32 (1962), 243-260.

[12] O. A. Ladyzhenskaya, The mathematical theory of viscous incompressible flow, Gordon and Breach, New York, 1969.

[13] J. L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod et Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[14] T. Miyakawa, On the initial value problem for the Navier-Stokes equations in L^p spaces, Hiroshima Math. J. 11 (1981), 9-20.

[15] P. E. Sobolevskii, Study of Navier-Stokes equations by the methods of the theory of parabolic equations in Banach spaces, Soviet Math. Dokl. 5 (1964), 720-723.

[16] V. A. Solonnikov, Estimates for solutions of nonstationary Navier-Stokes equations, J. Soviet Math. 8 (1977), 467-529.

[17] F. B. Weissler, The Navier-Stokes initial value problem in L^p, Arch. Rational Mech. Anal. 74 (1980), 219-230.